Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ____________________

Carnet: ____________________ Sección: __________

MA-3111-1:30 p.m.—Segundo Parcial Modelo , 2009, 40 %—C

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso.

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$(1/\lvert a\rvert)\hat{f}(\omega/a)$
$f_{gen}^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$
$e^{-cx^2/2}$	$(1/\sqrt{2\pi c})e^{-\omega^2/2c}$

$1/(c^2+x^2)$	$(1/2c)e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$c/[\pi(c^2+\omega^2)]$
$(\operatorname{sen} cx)/x$	$(1/2)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$(\operatorname{sen} c\omega)/\pi\omega$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$1/2\pi$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\mathcal{F}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

---

1. (8 puntos) Calcula la transformada de Fourier seno de $f(x) = e^{-x}$
Solución
Bueno tenemos que calcular

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(wx)dx$$

Lo más sencillo es escribir el seno como exponeniales imaginarias:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{(iw-1)x} - e^{-(iw+1)x}\right)dx =$$
$$\frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{(wi-1)x}}{wi-1} + \frac{e^{-(iw+1)x}}{iw+1}\right)\Bigg|_0^{\infty} =$$
$$\frac{-1}{i\pi}\left(\frac{1}{wi-1} + \frac{1}{wi+1}\right) = \frac{w}{\pi(1+w^2)}$$

2. (13 ptos.) Halle $u(x,t)$ acotada tal que

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Solución
Es una ecuación de onsdas normal y corriente. Separamos variables $u(x,y) = \phi(x)\psi(t)$ y obtenemos:

$$\phi''(x) = \lambda\phi(x), \qquad \psi''(t) = \lambda\psi(t)$$

Las condiciones de contorno nos obligan a que $\lambda < 0$ se una número real negativo que podemos llamar $\lambda = -w^2$. La solución para $\phi(x)$ debe ser:

$$\phi(x) = A\cos(wx) + B\,\mathrm{sen}(wx)$$
$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$\phi'(1) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}(w) = 0 \Rightarrow w = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Luego sabemos que $\lambda_n = -(n\pi)^2$ y podemos solucionar para $\psi_n(t)$

$$\psi_n(t) = A_n\cos(n\pi t) + B_n\,\mathrm{sen}(n\pi t)u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi t)\cos(n\pi x) + B_n\,\mathrm{sen}(n\pi t)\cos(n\pi x)$$

La primera condición inicial implica que:

$$0 = u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi x)$$
$$A_n = 0$$

Para calcular los B_n imponenmos la otra condición inicial

$$x = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n\cos(n\pi x)$$

Usamos Fourier para calcular los coeficientes:

$$n\pi B_n = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = 2\frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Perdonen que no haga la integral ustedes deben hacerla. Luego vemos que $B_{2k} = 0$ y

$$B_{2k+1} = \frac{-4}{n^3\pi^3}$$

y la solución es:

$$u(x,t) = \frac{-4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,\mathrm{sen}(n\pi t)\cos(n\pi x)$$

3. (13 ptos.) Halle $u(x,y)$ acotada para $y > 1$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & ; \ x \in \mathbb{R} \quad 0 < y < \infty \\ u(x,0) = 1 + \delta(x) \end{cases}$$

Solución
Una ecuación de Laplace. Esta definida en todo $\mathbb{R}$ esta vez usamos transformadas de Fourier. Definimos

$$\hat{u}(w,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-iwx}dx$$
$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w,y)e^{iwx}dw$$

Como siempre la ecuación para la transformada es más sencilla:

$$-w^2\hat{u}(w,y) + \hat{u}_{yy}(w,y) = 0 \Rightarrow \hat{u}(w,y) = A(w)e^{wy} + B(w)e^{-wy}$$

Como tiene que ser acotada $A(w) = 0$ si $w > 0$ y $B(w) = 0$ si $w < 0$, porque $y > 0$. Introducimos este resultado y tenemos la solución acotada más general de la ecuación del calor.

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(w)e^{-y|w|}e^{iwx}dw$$

Bueno, para hallar $B(w)$ invertimos la condición inicial:

$$B(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\delta(x))e^{-iwx}dx = \delta(w) + \frac{1}{2\pi}$$

Por tanto la solución final es:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta(w) + \frac{1}{2\pi}\right)e^{-y|w|}e^{iwx}dw =$$
$$1 + \frac{2y}{y^2+x^2}$$

4. (8 ptos.) Calcule la integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\, dx$$

Solución

Usamos Parseval. Definimos $f(x) = e^{-2|x|}$ y $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$, de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)dw = 2\pi \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} \frac{1}{4+w^2} dw = 2\arctan(a/2)$$